

## Capítulo 3: Métodos de resolución de circuitos

### 3.1 Variables de una red

El estado de régimen (o respuesta) de una red queda completamente determinado si se conocen las tensiones y corrientes en todas sus ramas. Las corrientes de rama, a su vez, se relacionan con las tensiones de rama a través de ecuaciones fundamentales que caracterizan la relación V-A de los elementos independientes. Por ejemplo, en una rama resistiva, la d.d.p.  $V$ , por ley de Ohm, es

$$V = R I$$

donde  $I$  es la corriente de la rama y  $R$  la resistencia de la rama.

Podemos, por lo tanto, considerar ya sea las corrientes de rama o las tensiones de rama como adecuadas para la caracterización del comportamiento de la red. Si el número total de ramas se llama  $b$ , entonces tendremos  $b$  magnitudes (corrientes o tensiones) que jueguen el papel de incógnitas o variables para hallar la respuesta de la red.

Demostraremos ahora que no cualquier conjunto (tensiones o corrientes) de esas  $b$  magnitudes es linealmente independiente, sino que un menor número de variables es suficiente para caracterizar el equilibrio de la red, ya sea en una base de tensiones o en una de corrientes.

#### 3.1.1 Concepto de árbol.

Vimos que al gráfico que representa solamente la interconexión geométrica de los elementos que constituyen un circuito se lo denomina **grafo** del circuito dado:

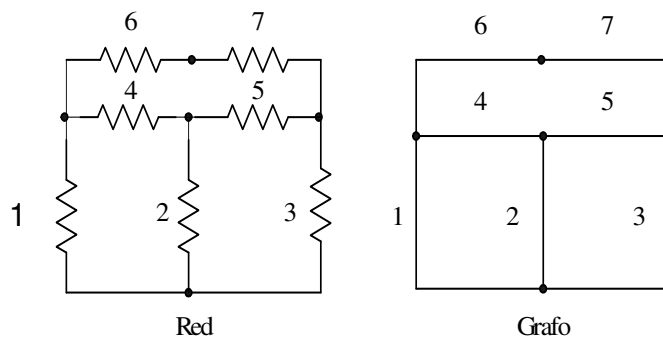


Fig. 1

Asociados con el grafo aparecen tres conceptos: **rama**, **nudo** y **elemento independiente**. El grafo es el esqueleto de una red, solo muestra sus propiedades geométricas, y es útil para caracterizar el comportamiento de la misma en términos de tensiones y corrientes, y decidir si el conjunto elegido de estas variables es, además de independiente, el más adecuado para la caracterización de la red.

El grafo de una red evidencia además un número de caminos cerrados por los cuales pueden circular corrientes. Esta propiedad de contener caminos cerrados es obviamente necesaria para la

existencia de corrientes en la red asociada, y es una propiedad que puede destruirse a través de la remoción de ramas bien elegidas, como podemos observar en la figura siguiente:

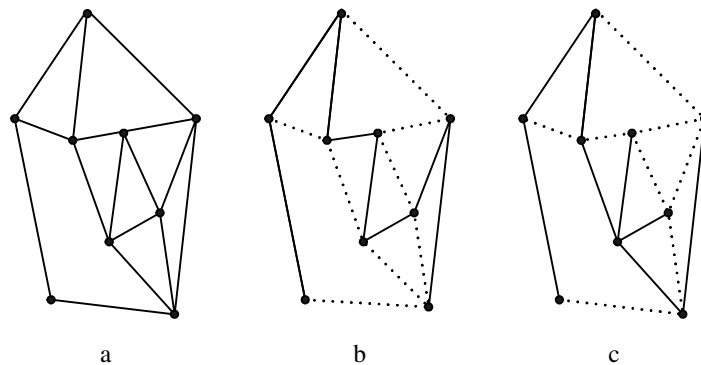


Fig. 2

En la fig. 2a se muestra un grafo, y nuevamente en la 2b y 2c con algunas de sus ramas punteadas. Si las ramas punteadas se sacaran, quedaría en 2b y 2c un sub-grafo que contiene todos los nudos del grafo original, pero ningún camino cerrado. A este sub-grafo se lo denomina **árbol** de la red debido a que su estructura no posee caminos cerrados. Más específicamente:

*Árbol es cualquier conjunto de ramas del grafo original que conecta todos los nudos sin formar ningún camino cerrado.*

No es difícil ver que el número de ramas de árbol  $n_a$  es siempre  $n - 1$ , siendo  $n$  el número total de nudos de la red. En efecto, si comenzamos sólo con los nudos dibujados y ninguna rama, la primera rama que se dibuje conectará dos nudos, pero de ahí en más solo se necesitará agregar una rama adicional para conectar cada nuevo nudo. Por lo tanto, para una red dada existen numerosos árboles, cada uno de los cuales conecta los  $n$  nudos, todos los cuales poseen  $n_a = n - 1$  ramas, que se denominan **ramas de árbol**.

Las ramas restantes se denominan **ramas de enlace** y se indican con la letra  $l$ . Si hay  $l$  ramas de enlace, y el número total de ramas de la red es  $b$ , entonces el número de ramas de enlace es  $l = b - n_a = b - n + 1$ .

Es decir, en cualquier circuito tendremos:

$$n_a = n - 1 \text{ número de ramas de árbol}$$

y

$$b = l + n_a \text{ número de ramas de enlace}$$

### 3.1.2 Corrientes independientes en una red.

Si en una red dada se elige un árbol, la totalidad de las  $b$  ramas se separa en dos grupos: las *ramas de árbol* y las *ramas de enlace*. En consecuencia, las corrientes de rama se dividen en *corrientes de ramas de árbol* y *corrientes de ramas de enlace*. Dado que al sacar o abrir las ramas de enlace se

destruyen todos los caminos cerrados y la totalidad de corrientes de rama se hace cero, entonces queda claro que el hacer cero solamente las corrientes de ramas de enlace fuerza a cero todas las corrientes de la red. Es decir, son las ramas de enlace las que permiten la existencia de un estado de régimen no nulo en la red. Sus valores fijan los valores de todas las corrientes, por lo que es posible expresar las corrientes de ramas de árbol únicamente en función de las corrientes de enlace.

De lo antes expuesto concluimos lo siguiente:

de las  $b$  corrientes de rama de una red, sólo las corrientes de enlace  $l$  son independientes, siendo por tanto  $l$  el menor número de corrientes en función de las cuales pueden las otras ser expresadas unívocamente.

Esta afirmación se deduce del hecho de que todas las corrientes se hacen cero cuando las corrientes de enlace son cero. Queda claro que el número de corrientes independientes no es mayor que  $l$  puesto que si una de las corrientes de árbol pudiera ser independiente, entonces tendría que permanecer distinta de cero al ser cero las corrientes de enlace, condición imposible desde el punto de vista físico. Por otro lado, el número de corrientes independientes no es menor que  $l$ , dado que si así fuera sería posible hacer cero todas las corrientes en la red con una o más ramas de enlace en su lugar, resultado que no es posible pues existirán caminos cerrados en la medida que las ramas de enlace permanezcan en su lugar.

De esta manera vemos que es posible expresar unívocamente el estado de régimen de una red en función de  $l = \mathbf{b} - \mathbf{n} + \mathbf{1}$  corrientes independientes solamente. Esta afirmación nos permitirá arribar a los métodos de resolución conocidos como “método de mallas” y “método de bucles”.

### 3.1.3 Tensiones independientes en una red.

Análogamente, se pueden ver las tensiones de rama como separadas en dos grupos: las *tensiones de ramas de árbol* y las *tensiones de ramas de enlace*. Dado que las ramas de árbol conectan todos los nudos, si se hacen cero dichas tensiones (por ejemplo, cortocircuitando las ramas de árbol), entonces todos los potenciales de nudos son coincidentes, y las tensiones de todas las ramas se anulan. O sea que:

*hacer cero las tensiones de rama de árbol hace cero todas las tensiones de la red, por lo que podemos decir que las tensiones de rama de árbol constituyen un sistema linealmente independiente. El número de tensiones de rama independientes en una red es por lo tanto  $\mathbf{n}-\mathbf{1}$ , es decir, el número de ramas de árbol.*

Por lo tanto, es posible expresar las tensiones de rama de enlace en función de las tensiones de rama de árbol.

El número de tensiones independientes no puede ser mayor que  $n-1$  porque una o más tensiones de enlace deberían ser independientes, y esta suposición se contradice por el hecho de que todas las tensiones se hacen cero cortocircuitando solamente las ramas de árbol. Por otro lado, no podría ser un número menor que  $n-1$  dado que no es físicamente posible forzar todos los potenciales de los nudos para que coincidan cuando algunas tensiones de rama de árbol son distintas de cero.

Así, vemos que el estado de régimen de una red queda unívocamente determinado por medio de:

$$l = b - n + 1 \quad \text{corrientes independientes}$$

$$n_a = n - l = b - l \quad \text{tensiones independientes}$$

Dado que en general  $n \neq \ell$ , la determinación del estado de régimen de una red en función de las corrientes involucrará distinto número de incógnitas que la representación en función de las tensiones.

El número de variables independientes asociado con un sistema físico dado determina unívocamente sus grados de libertad, cuyo número no depende ni del método algebraico ni de la forma en que se eligen las variables.

### 3.2 Resolución de circuitos mediante la aplicación de las leyes de Kirchhoff.

*Cuando se eligen las corrientes como variables, el equilibrio de un circuito se expresa en función de la ley de Kirchhoff de tensión, y cuando las variables son tensiones, el equilibrio se expresa por la ley de Kirchhoff de corrientes.*

La ley de Kirchhoff de Tensión (LKT) expresa que:

$$\sum \pm v = 0$$

Por otro lado, la ley de Kirchhoff de Corrientes (LKC) plantea que:

$$\sum \pm i = 0$$

Vimos que el estado de una red se podía expresar en función de:

$$l = b - n + 1 \quad \text{corrientes independientes de rama de enlace}$$

$$n_a = n - l = b - l \quad \text{tensiones independientes de rama de árbol}$$

O sea que, tal como vimos en el capítulo 1, necesitaremos  $l = b - n + 1$  ecuaciones independientes de la LKT, y  $n - l$  ecuaciones independientes de la LKC, totalizando de esta forma las  $b$  ecuaciones necesarias.

### 3.3 Método de mallas, de corrientes cíclicas o de corrientes ficticias.

El cálculo de los circuitos eléctricos con elementos lineales puede reducirse a la solución simultánea de solo  $l = b - n + 1$  ecuaciones independientes establecidas de acuerdo a la segunda ley de Kirchhoff, aplicando el método de las intensidades de mallas que desarrollaremos a

continuación.

### 3.3.1 Obtención de las ecuaciones

Examinaremos la red de la fig. 3, que tiene 6 ramas y cuatro nudos. De lo visto anteriormente, sabemos que podremos escribir sólo tres ecuaciones l.i. de la LKC, para lo cual elegimos los nudos 1, 2 y 3. Para escribir las ecuaciones l.i. de la LKT, elegiremos circuitos que sean mutuamente independientes, de tal modo que al menos una de las ramas de una determinada malla sólo forme parte de ésta y no de otra. Por ejemplo, las ramas 1, 2 y 3 sólo entran en los circuitos 1 - 2 - 4 - 1, 2 - 3 - 4 - 2, y 1 - 4 - 3 - 1 respectivamente.

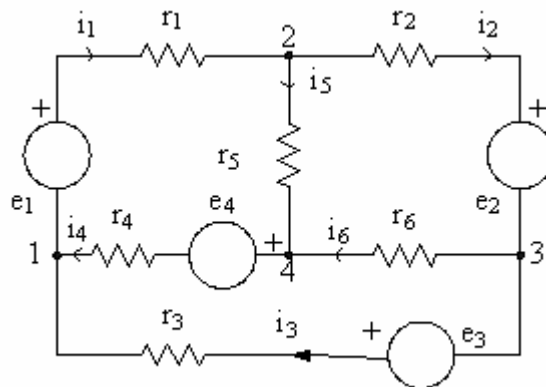


Fig. 3

Para el esquema de la figura tendremos:

- de acuerdo a la LKC:
 

nudo 1	$-i_1 + i_4 + i_3 = 0$	
nudo 2:	$i_1 - i_2 - i_5 = 0$	(1)
nudo 3:	$i_2 - i_3 - i_6 = 0$	

- de acuerdo a la LKT, eligiendo el sentido horario como sentido arbitrariamente positivo para el recorrido de la malla:

$$\begin{aligned}
 r_1 i_1 + r_5 i_5 + r_4 i_4 &= e_1 - e_4 \\
 r_2 i_2 + r_6 i_6 - r_5 i_5 &= -e_2 \\
 r_3 i_3 - r_4 i_4 - r_6 i_6 &= e_4 + e_3
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Vamos a tratar de expresar las ecuaciones (2) en función de  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ , para lo cual hacemos uso de las ecuaciones (1) (es decir, estamos eliminando las intensidades comunes a varias mallas).

$$\begin{aligned}
 i_4 &= i_1 - i_3 \\
 i_5 &= i_1 - i_2 \\
 i_6 &= i_2 - i_3
 \end{aligned}
 \tag{2'}$$

Así llegamos a:

$$\begin{aligned} r_1 i_1 + r_5 (i_1 - i_2) + r_4 (i_1 - i_3) &= e_1 - e_4 \\ r_2 i_2 + r_6 (i_2 - i_3) - r_5 (i_1 - i_2) &= -e_2 \\ r_3 i_3 - r_4 (i_1 - i_3) - r_6 (i_2 - i_3) &= e_4 + e_3 \end{aligned} \quad (3)$$

Ordenando:

$$\begin{aligned} (r_1 + r_5 + r_4) i_1 - r_5 i_2 - r_4 i_3 &= e_1 - e_4 \\ -r_5 i_1 + (r_2 + r_6 + r_5) i_2 - r_6 i_3 &= -e_2 \\ -r_4 i_1 - r_6 i_2 + (r_3 + r_4 + r_6) i_3 &= e_4 + e_3 \end{aligned} \quad (4)$$

Observando las ecuaciones (4) vemos que:

- las intensidades  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  (que originalmente eran corrientes de rama) aparentan circular ahora cada una por una malla, cerrándose sobre sí mismas. Por esto se las denomina corrientes de malla, corrientes cíclicas o corrientes ficticias.
- Si observamos el circuito, vemos que todas ellas tienen el mismo sentido de circulación en cada una de las mallas.
- Los coeficientes presentan una simetría en valor absoluto y signo respecto a la diagonal principal del sistema, siendo positivos sólo los de la diagonal principal y negativos todos los restantes. Esto es consecuencia de que todas las corrientes ficticias tienen el mismo sentido de circulación. Además, la matriz de coeficientes es diagonalmente dominante, es decir, el coeficiente de la diagonal principal es mayor que la suma de los valores absolutos de los restantes coeficientes de la fila.

*Del ejemplo dado, se deduce que, para hallar el estado de régimen de un circuito aplicando este método, basta con identificar las mallas del circuito, asociarles las correspondientes corrientes de malla (todas con el mismo sentido), y escribir en base a esas corrientes la LKT para cada malla, tal como se muestra en la figura 4 (a). El número de ecuaciones necesarias para resolver por el método de mallas coincide con el número de corrientes independientes de un circuito:*

$$b - (n - 1) = b - n + 1$$

Las intensidades reales en las ramas comunes a varias mallas se hallan sumando algebraicamente las corrientes de malla:

$$i_4 = i_1 - i_3$$

$$i_3 = i_1 - i_2$$

$$i_6 = i_2 - i_3$$

Las tensiones en cualquier rama del circuito se determinan por la suma algebraica de las caídas de tensión originadas en la rama en cuestión por la intensidad de la propia malla y la de la malla contigua. Por ejemplo, en la malla que contiene las resistencias  $r_1$ ,  $r_5$  y  $r_4$ , la tensión en la rama 5 es igual a la suma algebraica de dos tensiones: la tensión debida a la intensidad de malla  $i_1$  en la resistencia  $r_5$ , y la debida a la intensidad  $i_2$  en la misma.

Al sustituir en el sistema de partida las corrientes de rama por las corrientes de malla, se satisface

automáticamente la LKC en los nudos, ya que cada corriente de malla ingresa por una de las ramas al nudo, y por otra se aleja de él. Por ejemplo, en el nudo 4, según la LKC tendremos, para las corrientes de rama:

$$i_5 + i_6 - i_4 = 0$$

y para las corrientes de malla:

$$(i_1 - i_2) + (i_2 - i_3) - (i_1 - i_3) = 0$$

**Nota:** Cabe aclarar que por cada elemento del circuito existe sólo una corriente circulante, que es la corriente de rama, no dos. Sólo aparecen dos cuando las descomponemos en corrientes de malla (de ahí el otro nombre del método "corrientes ficticias").

### Ejemplo:

Supongamos identificar parte de una red y asignar nombres y sentido a las corrientes de malla ( $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$ , sentido horario)

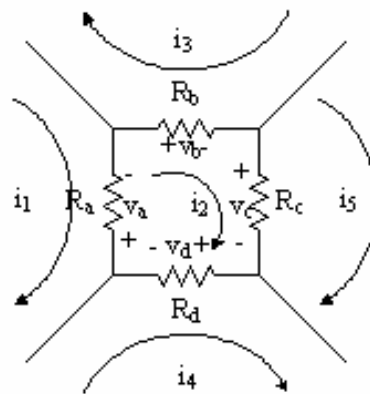


Fig. 4

Recorremos la malla 2 en sentido horario y aplicamos la LKT:

$$v_a + v_b + v_c + v_d = 0$$

estas tensiones las expresamos en función de las corrientes de malla:

$$(i_2 - i_1) R_a + (i_2 - i_3) R_b + (i_2 - i_3) R_c + (i_2 - i_4) R_d = 0$$

Ordenando, obtenemos la ecuación de la malla 2:

$$-i_1 R_a + i_2 (R_a + R_b + R_c + R_d) - i_3 R_b - i_4 R_d - i_3 R_c = 0$$

Esta ecuación puede interpretarse como la suma (superposición) de las d.d.p. producidas por la corriente  $i_2$  (término propio) y las producidas por las corrientes de las mallas adyacentes (términos mutuos). El término propio es positivo y los mutuos son negativos, a consecuencia de haber asignado igual sentido de circulación a todas las corrientes de malla (en este caso, sentido horario).

### 3.3.2 Escritura sistemática de las ecuaciones de mallas.

Como lineamientos generales para escribir un sistema de ecuaciones de mallas, podemos mencionar:

1. Dibujar la red exponiendo las **mallas** o **camino cerrados mínimos e independientes**. Esto queda garantizado cuando los caminos cerrados elegidos no cortan ramas.
2. En cada malla, dibujar una flecha en sentido horario (o antihorario, pero manteniendo el mismo para todas) para indicar el sentido arbitrariamente positivo de las corrientes ficticias.
3. Escribir la LKT en cada malla utilizando la relación volt-ampere de cada elemento. Si hay  $l$  mallas, habrá  $l$  corrientes de malla incógnitas, por lo tanto habrá  $l$  ecuaciones independientes para resolver.
4. Agrupar los términos propios y los mutuos y verificar la simetría de la matriz de coeficientes.
5. Resolver simultáneamente.

### 3.3.3 Forma general y expresión matricial de las ecuaciones de malla:

Según lo visto al desarrollar el método, la forma general de las ecuaciones es:

$$i_h(t) R_{hh} + \beta_k i_k R_{hk} = e_h(t) + \beta_k e_k(t)$$

donde:  $h = 1, 2, \dots, l$ , con  $l$  igual al número de mallas y  $k \neq h$  y además:

- $R_{hh}$ ,  $e_h(t)$  son la resistencia y la f.e.m. total de la malla cuya ecuación estamos escribiendo,
- $i_k(t)$  son las corrientes de las restantes mallas del circuito que poseen ramas en común con la malla  $h$ .
- $R_{hk}$  será la resistencia de la rama común a dos mallas.
- $e_k(t)$  la f.e.m. neta ubicada en la rama común a las mallas  $h$  y  $k$ .
- $\beta_k$  puede tener valor 1, -1 o 0 si las mallas  $h$  y  $k$  tienen, o no, ramas en común.

En forma matricial un sistema de ecuaciones de malla se expresa como:

$$[R_{hj}] [I_h] = [E_{hh}]$$

donde  $R_{hj}$  es la matriz pasiva (o matriz resistencia) e  $I_h$  es el vector corrientes de malla:

$$R_{hj} = \begin{bmatrix} R_{11} & \dots & R_{1\ell} \\ R_{21} & \dots & R_{2\ell} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ R_{\ell 1} & \dots & R_{\ell\ell} \end{bmatrix} \quad I_h = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_\ell \end{bmatrix}$$

Respecto de la matriz pasiva del sistema (matriz resistencia) realizamos las siguientes observaciones:

- a) es **simétrica** respecto de la diagonal principal.
- b) los **únicos elementos positivos son los de dicha diagonal**, hecho que resulta de haber elegido el mismo sentido de circulación en todas las mallas.
- c) es **diagonalmente dominante**, es decir el elemento de la diagonal principal  $R_{hh}$  es mayor que la suma de los valores absolutos de los restantes elementos de la misma fila.
- d) el determinante es  $\neq 0$ .



**3.3.4 Caso particular: fuente ideal de corriente en una rama común a dos mallas.**

Supongamos tener el siguiente caso, donde se muestra una porción de una red genérica:

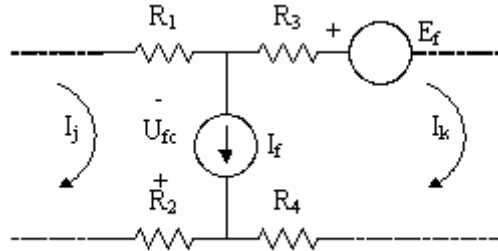


Fig. 5

Vemos que hay una fuente de corriente ideal ubicada en la rama común a las mallas **j** y **k**, en cuyos bornes existe una d.d.p. que no conocemos, pero que debemos considerar para escribir la LKT. Por lo tanto, el procedimiento es escribir las ecuaciones de LKT correspondientes a las mallas **j** y **k** teniendo en cuenta la d.d.p. en bornes de la fuente de corriente  $U_f$ :

$$\begin{aligned} \dots\dots + I_j(R_1 + R_2 + \dots\dots) - \dots\dots &= U_{fc} \\ \dots\dots + I_k(R_3 + R_4 + \dots\dots) &= -U_{fc} - E_f \end{aligned}$$

Al hacer esto hemos introducido en nuestro sistema una nueva incógnita,  $U_{fc}$ , por lo que necesitamos una ecuación auxiliar, a fin de igualar el número de incógnitas al de ecuaciones. Esta surgirá de expresar la corriente de la fuente de corriente como diferencia de las corrientes de las dos mallas adyacentes:

$$I_f = I_j - I_k$$

**3.3.5 Resolución de circuitos con fuentes controladas aplicando el método de mallas**

En la figura siguiente vemos el diagrama de un circuito, su modelo matemático y el grafo asociado. Como en dicho modelo aparece una fuente controlada, veremos de qué manera se modifican las ecuaciones del método de mallas:

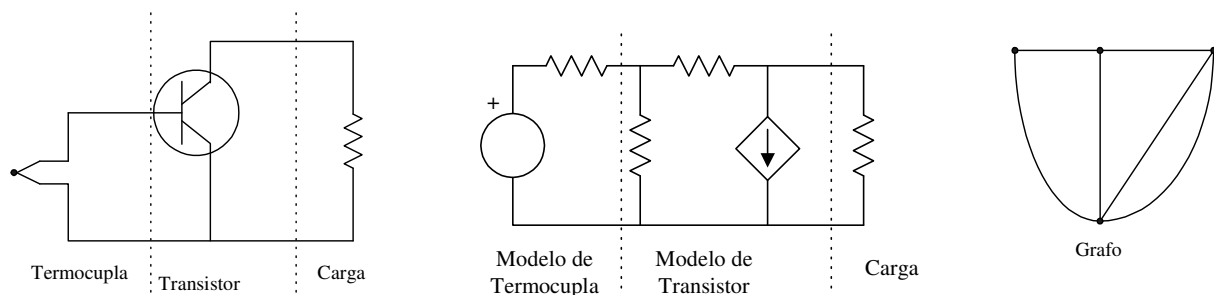


Fig. 6

Dibujamos el modelo del circuito de la figura 6:

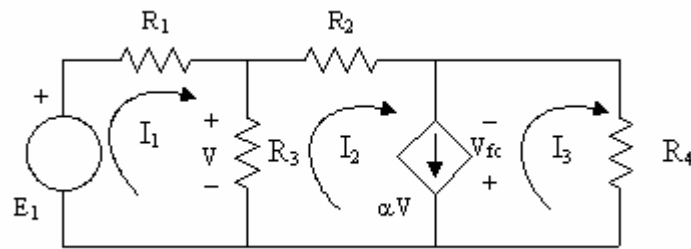


Fig. 7

Siendo que ya conocemos la forma general de las ecuaciones de este método, las planteamos directamente, teniendo en cuenta que debemos considerar la d.d.p. en bornes de la fuente de corriente, dado que la misma se encuentra en la rama común a dos mallas:

$$I_1 (R_1 + R_3) - I_2 R_3 + 0 I_3 = E_1$$

$$-I_1 R_3 + I_2 (R_3 + R_2) = V_{fc}$$

$$I_3 R_4 = -V_{fc}$$

Vemos que tenemos un sistema con matriz de coeficientes simétrico de tres ecuaciones con cuatro incógnitas. Necesitamos una ecuación auxiliar, la cual planteamos, como vimos antes, sabiendo que la diferencia de las corrientes  $I_2$  e  $I_3$  es igual a la corriente de la fuente:

$$I_2 - I_3 = \alpha V$$

En esta ecuación aparece una nueva incógnita, que es la tensión  $V$ , parámetro de control de la fuente. La expresamos entonces en función de las variables primarias del sistema, que son las corrientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ :

$$V = (I_1 - I_2) R_3$$

Una vez que hacemos los reemplazos correspondientes podemos observar que desaparece la simetría de la matriz pasiva del sistema.

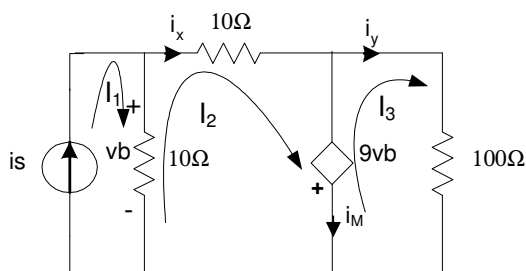
$$I_1 (R_1 + R_3) - I_2 R_3 = E_1$$

$$-I_1 R_3 + I_2 (R_3 + R_2) - V_{fk} = 0$$

$$I_2 R_4 (1 + \alpha R_3) - \alpha I_1 R_4 R_3 + V_{fk} = 0$$

### Ejemplo:

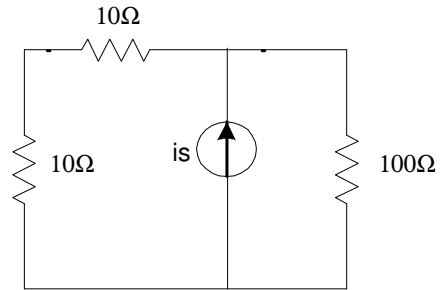
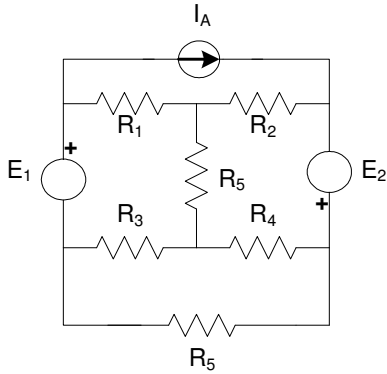
En el siguiente circuito, plantear el sistema de ecuaciones de mallas que permite determinar el estado de régimen del circuito.



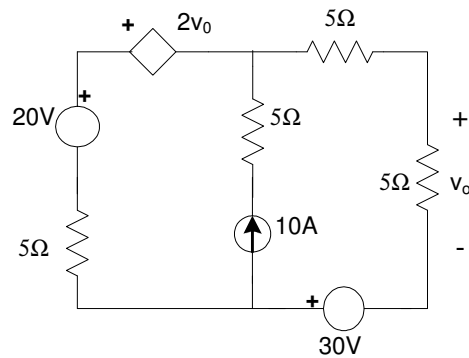
$$\begin{cases} I_1 & = i_s \\ -10I_1 + (10+10)I_2 & = 9v_b \\ 100I_3 & = -9v_b \\ v_b = 10(I_1 - I_2) & \text{Ecuacion de control} \end{cases}$$

**Ejercicios de aplicación**

1) En los siguientes circuitos, plantear los sistemas de ecuaciones de mallas que permitirían determinar el estado de régimen de cada uno de ellos.



2) Hallar el valor de  $v_o$  aplicando el método de Mallas.



**Rta:**  $v_o = 20V$

**3.4 Método de las corrientes de bucle**

Tomemos el siguiente circuito:

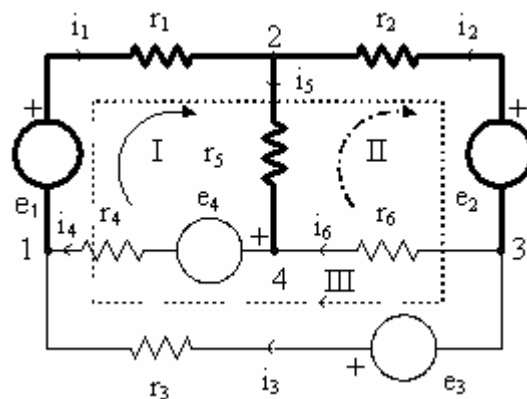


Fig. 8

Comenzamos por dar nombre y asignar un sentido de circulación a todas las corrientes de rama ( $i_1 \dots i_6$ ). Luego elegimos un árbol (conjunto de ramas que une todos los nudos del mismo sin formar ningún camino cerrado), con lo que las corrientes se separan en dos grupos: corrientes de rama de árbol ( $i_1, i_2$  e  $i_3$ ) y corrientes de rama de enlace ( $i_3, i_4$  e  $i_6$ ).

Escribimos la ley de Kirchhoff de corrientes en cada nudo:

$$\begin{array}{ll}
 \text{nudo} & 1 \quad i_3 + i_4 - i_1 = 0 \\
 \text{nudo} & 2 \quad i_2 + i_1 - i_5 = 0 \\
 \text{nudo} & 3 \quad -i_2 - i_3 - i_6 = 0 \\
 \text{nudo} & 4 \quad i_5 + i_6 - i_4 = 0
 \end{array}$$

Explicitamos ahora las corrientes de rama de árbol  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  en función de las corrientes de ramas de enlace  $i_4$ ,  $i_6$  e  $i_3$ :

$$\begin{array}{l}
 i_1 = i_3 + i_4 \\
 i_2 = -i_6 - i_3 \\
 i_5 = i_4 - i_6
 \end{array}$$

Escribimos la LKT para los caminos que se forman al conectar una por una las ramas de enlace, y adoptamos como sentido positivo de recorrido el que defina la corriente de enlace correspondiente:

$$\begin{array}{l}
 i_1 r_1 + i_5 r_5 + i_4 r_4 = e_1 - e_4 \\
 i_6 r_6 - i_3 r_5 - i_2 r_2 = -e_2 \\
 -i_2 r_2 + i_1 r_1 + i_3 r_3 = -e_2 + e_1 + e_3
 \end{array}$$

Reemplazando las corrientes de rama de árbol por las de rama de enlace, según lo indican las ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{array}{l}
 (i_4 + i_3)r_1 + (i_4 - i_6)r_5 + i_4 r_4 = e_1 - e_4 \\
 i_6 r_6 - (i_4 - i_6)r_5 - (-i_3 - i_6)r_2 = -e_2 \\
 -(-i_3 - i_6)r_2 + (i_4 + i_3)r_1 + i_3 r_3 = -e_2 + e_1 + e_3
 \end{array}$$

Agrupando y ordenando por columnas llegamos a:

$$\begin{array}{l}
 i_4(r_1 + r_5 + r_4) - i_6 r_5 + i_3 r_1 = e_1 - e_4 \\
 -i_4 r_5 + i_6(r_6 + r_5 + r_2) + i_3 r_2 = -e_2 \\
 i_4 r_1 + i_6 r_2 + i_3(r_3 + r_2 + r_1) = -e_2 + e_1 + e_3
 \end{array}$$

Al resolver este sistema obtenemos el valor de las corrientes de rama de enlace, o corrientes de bucle, que son las variables independientes. La forma general de las ecuaciones es:

$$i_h(t) R_{hh} + \beta_k i_k(t) R_{hk} = e_h(t)$$

donde:  $h = 1, 2, \dots, l$   
 $k = l+1, \dots, b,$

con  $l$ : número de ramas de enlace, y  $b$ : número total de ramas del circuito.

y además:

- $R_{hh}, e_h(t)$  : resistencia y f.e.m. totales del bucle para el que se escribe la ecuación.

- $i_k(t)$  : corrientes de los otros bucles que circulan por las ramas de árbol que quedan incluidas en el bucle en estudio (ramas compartidas),
- $R_{hk}$ , resistencias mutuas entre el bucle  $h$  y los restantes que comparten las ramas de árbol.

$$\beta_k = \begin{cases} 0 & \text{si la rama } k \text{ no forma parte del bucle " } h \text{"} \\ 1 & \text{si la corriente de rama } k \text{ tiene sentido concordante con la del bucle " } h \text{"} \\ -1 & \text{si la corriente de rama } k \text{ no tiene sentido concordante con la del bucle " } h \text{"} \end{cases}$$

Las corrientes de rama de árbol se obtienen por la suma algebraica de las corrientes de rama de enlace, en la forma:

$$i_j(t) = \alpha_{jh} i_h(t)$$

siendo :

$i_j(t)$ : corriente de rama de árbol,

$i_h(t)$ : corriente de rama de enlace.

$$\alpha = 0, 1, -1$$

$$h = 1, 2, \dots, l$$

$$j = l+1, \dots, b$$

### 3.4.1 Expresión matricial del sistema de ecuaciones de bucles.

Hemos obtenido la forma general de las ecuaciones de bucle. Si las queremos expresar en forma matricial, definimos:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & \dots & R_{1\ell} \\ R_{21} & \dots & R_{2\ell} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ R_{\ell 1} & \dots & R_{\ell\ell} \end{bmatrix} \quad [I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_\ell \end{bmatrix} \quad [E] = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \dots \\ E_{\ell\ell} \end{bmatrix}$$

donde :

- [R]: matriz pasiva del sistema (matriz resistencia o matriz de coeficientes),
- [I]: vector corrientes de bucle (o corrientes de rama de enlace),
- [E]: vector término independiente, constituido por las fuentes de f.e.m presentes en los bucles.

por lo que las ecuaciones de bucles, expresadas matricialmente, toman la forma:

$$[R] [I] = [E]$$

Observando la matriz pasiva del sistema, o matriz de coeficientes, podemos ver que:

- es simétrica respecto de la diagonal principal,
- los elementos de dicha diagonal son todos positivos,
- los restantes elementos de la matriz pueden ser positivos o no, según que las distintas

corrientes de bucle circulen o no en el mismo sentido por dichos elementos.

- puede llegar a darse la condición de que no sea diagonalmente dominante.
- $\Delta \neq 0$

*Comentario:* Si la topología de la red es tal que permite un árbol radial, nos encontramos con que el sistema de ecuaciones de bucles toma la forma de un sistema de ecuaciones de malla, lo cual ofrece la ventaja de presentar la menor superposición de corrientes en las ramas de árbol.

### 3.4.2 Resolución de circuitos con fuentes ideales de corriente.

En esta situación tenemos dos posibilidades: a) dejar la fuente de corriente en una rama de árbol o b) tomar esa rama como rama de enlace. Analizaremos ambas para determinar cuál de ellas es la más conveniente, haciendo referencia al circuito mostrado en la figura 9.

#### a) Fuente de corriente en rama de árbol:

En este caso nos encontramos con que debemos tener en cuenta la d.d.p. en bornes de la fuente de corriente al escribir las ecuaciones de la LKT. Tal como vimos al analizar el caso de fuente de corriente en una rama común a dos mallas, esto introduce una incógnita más en el sistema, y por lo tanto nos conduce a la necesidad de introducir una ecuación auxiliar que dirá que la diferencia o la suma de dos corrientes de bucle es igual al valor de corriente de la fuente ideal.

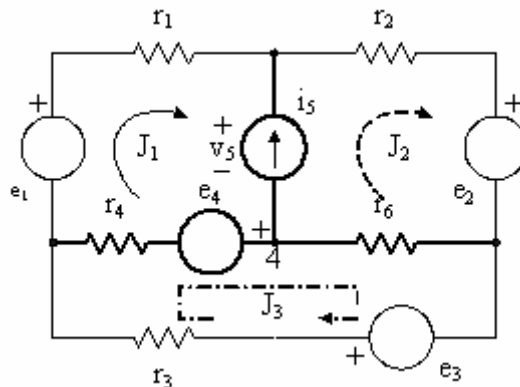


Fig. 9

$$\begin{array}{rclcl} J_1(r_1+r_4) & & - & r_4 J_3 & + & v_3 & = & e_1 - e_4 \\ & & & (r_2+r_6)J_2 & - & r_6 J_3 & - & v_3 & = & -e_3 \\ -r_4 J_1 & - & & r_6 J_2 & + & (r_4+r_6+r_3) J_3 & = & e_3 + e_4 \end{array}$$

Este es un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas, dado que para escribir correctamente la LKT tuvimos que considerar la d.d.p. en bornes de la fuente de corriente. La ecuación auxiliar, tal como lo mencionamos antes, será:

$$-J_1 + J_2 = I_3$$

de donde, expresando  $J_1$  en función de  $J_2$ , por ejemplo, podemos resolver el sistema.

#### b) Fuente de corriente en rama de enlace:

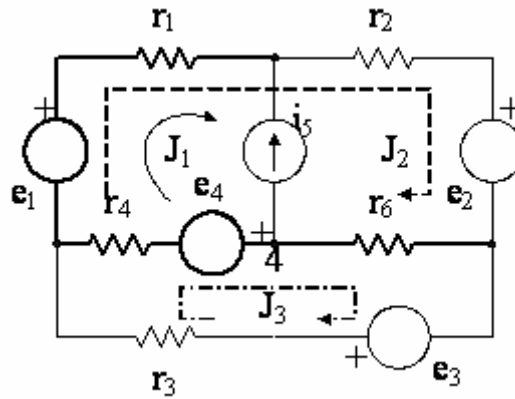


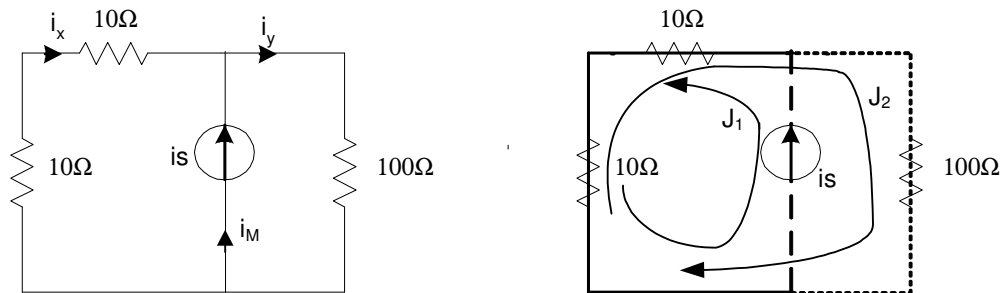
Fig. 10

Si elegimos el árbol de manera de que la fuente de corriente quede en una rama de enlace, al conectar dicha rama la corriente del bucle queda fijada e iguala al valor de la fuente, con lo que nuestro sistema de ecuaciones pasa a tener una incógnita menos. En la figura 10, el bucle  $J_1$  se cierra por la fuente de corriente de valor  $i_5$ , por lo que resulta  $J_1 = -i_5$ , y el sistema de ecuaciones a resolver será de  $2 \times 2$ :

$$\begin{aligned} J_2(r_1+r_2+r_6+r_4) + J_1(r_1+r_4) - J_3(r_4+r_6) &= e_1 - e_2 - e_4 \\ J_3(r_4+r_6+r_3) - J_1 r_4 - J_2(r_4+r_6) &= e_3 + e_4 \end{aligned}$$

Según se desprende de este ejemplo, conviene colocar todas las fuentes de corriente como rama de enlace, de manera de reducir el número de incógnitas del sistema.

Ejemplo



$$\begin{cases} J_1 = i_s \\ -(10+10)J_1 + (10+10+100)J_2 = 0 \end{cases}$$

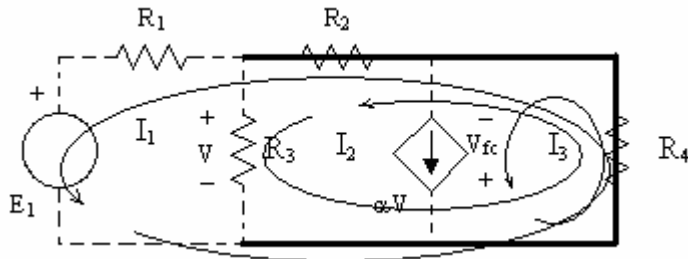
### 3.4.3 Resolución de circuitos con fuentes controladas por el método de bucles.

Dado que las ecuaciones del método de bucles son expresiones de la LKT, al igual que en el método de mallas, para plantearlas en circuitos con fuentes controladas procederemos realizando las mismas consideraciones que hicimos antes. La única diferencia ahora es que, al tener libertad para elegir los caminos más convenientes de manera de aprovechar la presencia de fuentes de corriente haremos las siguientes observaciones:

- Cuando haya fuentes de corriente controladas, las dejaremos en ramas de enlace.

- Elegiremos las ramas de control también como ramas de enlace, de manera tal que por las mismas circule una sola corriente, con lo cual la escritura de la ecuación de control será más simple.

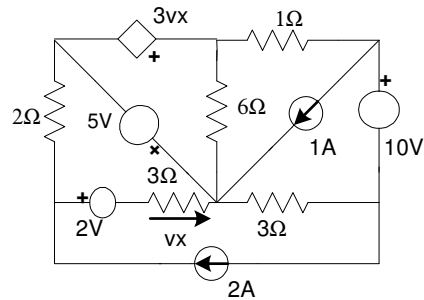
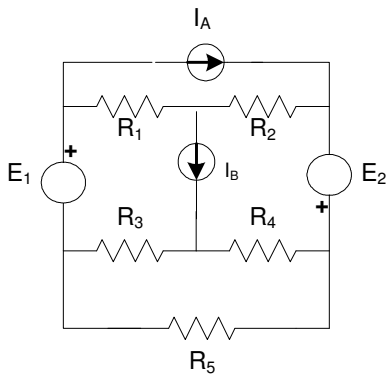
Ejemplo



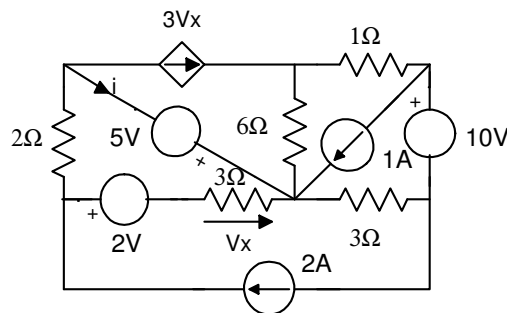
$$\begin{cases} I_1 ( R_1 + R_2 + R_4 ) + I_2 R_2 + R_4 I_3 = - E_1 \\ I_1 (R_2 + R_4) + I_2 ( R_3 + R_2 + R_4 ) + I_3 R_4 = 0 \\ I_3 = \alpha V \\ V = I_2 R_3 \end{cases}$$

**Ejercicios de aplicación**

1) Indicar dos posibles árboles en los siguientes circuitos. Elegir el más conveniente y escribir el sistema de ecuaciones de bucles que permita obtener el estado de régimen.



2) Plantear el sistema de ecuaciones de bucles, eligiendo el árbol más conveniente, para obtener el valor de i



**Rta:**  $i = 8 A$



### 3.5 Método de los potenciales de nudos.

Para escribir las ecuaciones de cualquiera de los métodos anteriores tomamos el concepto de corrientes de malla o de bucle y planteamos la ley de Kirchhoff de tensión en todos los caminos cerrados independientes del circuito. Esto hizo innecesario prestar atención a la LKC, dado que ésta se satisface en forma automática en todos los nudos porque las corrientes de malla o de bucle necesariamente suman cero en cada uno de ellos. De esta manera, la resolución se simplificó respecto de la aplicación lisa y llana de las leyes de Kirchhoff, reduciendo el número de ecuaciones a resolver ( $\mathbf{b}$  ecuaciones de Leyes de Kirchhoff,  $\mathbf{b}-\mathbf{n}_t+1$  ecuaciones de mallas o de bucles).

En el **método de nudos**, el concepto simplificador es la idea de medir las tensiones de todos los nudos de la red, respecto de uno particular que se denomina "de referencia" o "dato". Esto hace innecesario prestar atención a la LKT, ya que basta con satisfacer la LKC en cada nudo para que la LKT se satisfaga automáticamente. Así, el número de ecuaciones simultáneas se reduce a un número igual al de nudos independientes ( $\mathbf{n}_t - 1$ ), número éste en general inferior al de ramas  $\mathbf{b}$ , y comparable al de ecuaciones de malla.

A fin de obtener el sistema de ecuaciones de nudos, tomamos un nudo como referencia (se le asigna un potencial cero), y todos los demás se denominan con respecto al mismo, sobreentendiéndose que  $\varphi_1(t)$  es la tensión entre el nudo 1 y el de referencia,  $\varphi_2(t)$  entre el 2 y el de referencia, etc. Esta designación es significativa también desde el punto de vista práctico, ya que si se efectuaran mediciones, el terminal (-) del voltímetro se conectaría al de referencia (tierra) y el (+) se desplazaría por cada uno de los nudos restantes leyendo las tensiones de los mismos.

En la fig. 11, la tensión en el elemento **a** es  $\varphi_1(t)$ , en **c** es  $\varphi_2(t)$ , en **f** es  $\varphi_3(t)$ , en **b** es  $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ , en **d** es  $\varphi_2(t) - \varphi_3(t)$  y en **e** es  $\varphi_1(t) - \varphi_3(t)$ . Vemos así que si un elemento está conectado entre un nudo y el de referencia, su tensión en bornes es el potencial del nudo, y si está entre dos nudos, su tensión en bornes es la diferencia entre los potenciales de los nudos extremos de la rama.

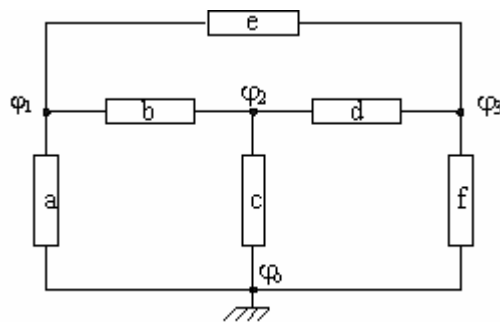


Fig. 11

Escribiremos ahora las ecuaciones de LKC en cada uno de los  $\mathbf{n}_t-1$  nudos, tomando al nudo 0 como referencia) en el siguiente circuito, a fin de obtener la regla sistemática de formación de ecuaciones:

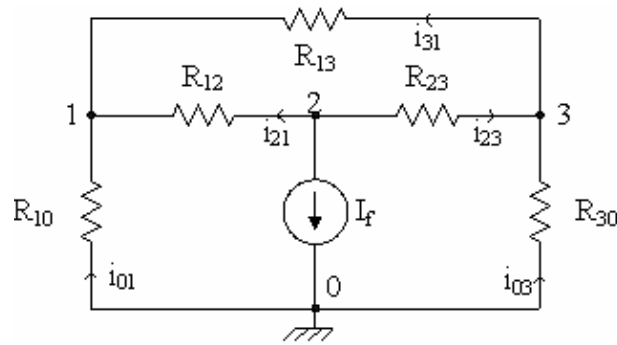


Fig. 12

Convención: las corrientes entrantes a cada nudo son (+) y las salientes son (-).

$$\begin{aligned} \text{nudo 1:} & \quad i_{21}(t) + i_{01}(t) + i_{31}(t) = 0 \\ \text{nudo 2:} & \quad -i_{21}(t) - i_{23}(t) - i_f(t) = 0 \\ \text{nudo 3:} & \quad i_{23}(t) + i_{03}(t) - i_{31}(t) = 0 \end{aligned}$$

En función de los potenciales de nudos será:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_{12}} - \frac{\varphi_{11}}{R_{10}} + \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_{13}} &= 0 \\ -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_{12}} - \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_{23}} - i_f &= 0 \\ \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_{23}} - \frac{\varphi_{13}}{R_{30}} - \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_{13}} &= 0 \end{aligned}$$

Reordenamos:

$$\begin{aligned} -\varphi_1 \left( \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_{13}} \right) + \varphi_2 \frac{1}{R_{12}} + \varphi_3 \frac{1}{R_{13}} &= 0 \\ \varphi_1 \frac{1}{R_{12}} - \varphi_2 \left( \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{13}} \right) + \varphi_3 \frac{1}{R_{23}} &= i_f \\ \varphi_1 \frac{1}{R_{13}} + \varphi_2 \frac{1}{R_{23}} - \varphi_3 \left( \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{30}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

A fin de que los coeficientes de la diagonal principal sean los únicos positivos, multiplicamos ambos miembros por  $-1$ , y sabiendo que la conductancia  $G = 1 / R$ , el sistema toma la forma:

$$\begin{aligned} \varphi_1 G_{11} - \varphi_2 G_{12} - \varphi_3 G_{13} &= 0 \\ -\varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} - \varphi_3 G_{23} &= i_f \\ -\varphi_1 G_{31} - \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Con lo que vemos que la forma general de las ecuaciones de un sistema de nudos es:

$$G_{jj} \varphi_j - \sum G_{ij} \varphi_i = \sum \alpha_j I_j$$

donde:

- $G_{jj}$  o conductancia propia del nudo es la suma de conductancias concurrentes al nudo  $j$ ,
- $G_{jl}$  es la suma de admitancias comunes a los nudos  $j$  y  $l$  para  $l = j$ ,
- $I_j$  es la suma de corrientes independientes del nudo  $j$ ,
- $\alpha$  es un factor que puede ser 1, -1 o 0, según sea que al nudo  $j$  lleguen o no corrientes independientes.

### 3.5.1 Casos especiales

- Fuente de tensión real en una rama.

Trabajaremos con el circuito de la figura 13, en el cual plantearemos las relaciones volt-amperé:

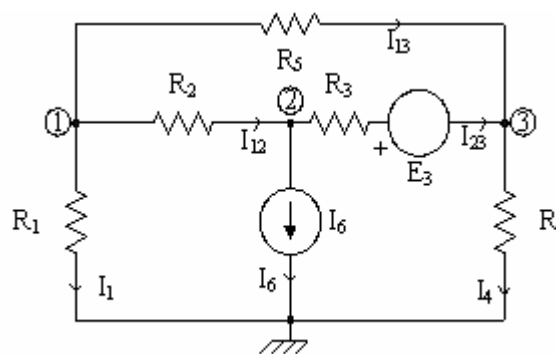


Fig. 13

$$I_1 = \frac{\varphi_1}{R_1} \quad I_{12} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2}$$

$$\varphi_2 = I_{23} R_3 + E_3 + \varphi_3 \Rightarrow I_{23} = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 - E_3}{R_3}$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3}{R_4} \quad I_{13} = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_5}$$

El planteo de la primera ley de Kirchoff en cada uno de los nudos independientes nos conduce a:

- En el nudo 1:

$$-I_1 - I_{12} - I_{13} = 0$$

$$-\frac{\varphi_1}{R_1} - \frac{\varphi_1}{R_2} + \frac{\varphi_2}{R_2} - \frac{\varphi_1}{R_5} + \frac{\varphi_3}{R_5} = 0$$

- En el nudo 2:

$$I_{12} - I_6 - I_{23} = 0$$

$$\frac{\varphi_1}{R_2} - \frac{\varphi_2}{R_2} - I_6 - \frac{\varphi_2}{R_3} + \frac{\varphi_3}{R_3} + \frac{E_3}{R_3} = 0$$

- En el nudo 3:

$$I_{23} + I_{13} - I_4 = 0$$

$$\frac{\varphi_2}{R_3} - \frac{\varphi_3}{R_3} - \frac{E_3}{R_3} + \frac{\varphi_1}{R_5} - \frac{\varphi_3}{R_3} - \frac{\varphi_3}{R_4} = 0$$

Multiplicando ambos miembros por (-1) a fin de dejar como positivos sólo los términos de la diagonal principal, llegamos al siguiente sistema:

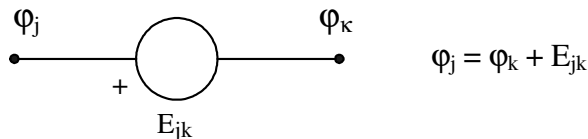
$$\begin{cases} \varphi_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) - \varphi_2 \frac{1}{R_2} - \varphi_3 \frac{1}{R_5} = 0 \\ -\varphi_1 \frac{1}{R_2} + \varphi_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \varphi_3 \frac{1}{R_3} = \frac{E_3}{R_3} - I_6 \\ -\varphi_1 \frac{1}{R_5} - \varphi_2 \frac{1}{R_3} + \varphi_3 \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_4} \right) = -\frac{E_3}{R_3} \end{cases}$$

Observamos que en los segundos miembros, además de la corriente de la fuente independientes de corriente  $I_6$ , aparece un término nuevo,  $\frac{E_3}{R_3}$ , numéricamente igual a la corriente de cortocircuito de

la fuente de tensión  $E_3$ . El signo de este término será positivo si dicha corriente de cortocircuito ingresa al nudo en estudio, como ocurre en la ecuación 2, o si se aleja de él, como ocurre en la ecuación 3.

- *Fuente única de tensión ideal en una rama.*

Dado que la conductancia de la rama en la cual se encuentra únicamente una fuente de tensión ideal es infinita (resistencia interna de la fuente igual a cero), no podemos escribir en el método de nudos el término correspondiente a la misma tal como hicimos anteriormente, pero sí podemos decir que:



y aprovechar la situación para simplificar la escritura de las ecuaciones, tomando uno de los bornes de la fuente como referencia, tal como se ve en el ejemplo siguiente.

*Ejemplo:*

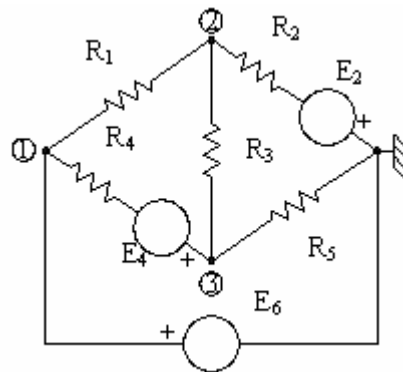


Fig. 14

$$\begin{aligned}\varphi_4 &= 0 \\ \varphi_1 &= E_6 \\ \varphi_2(G_1 + G_2 + G_3) - G_1\varphi_1 - G_3\varphi_3 &= -E_2G_2 \\ \varphi_3(G_3 + G_4 + G_5) - G_4\varphi_1 - G_3\varphi_2 &= E_4G_4\end{aligned}$$

- *Fuentes de tensión ideales concurrentes al mismo nudo*

En este caso, lo más conveniente es tomar como referencia el nudo al cual concurren las fuentes:

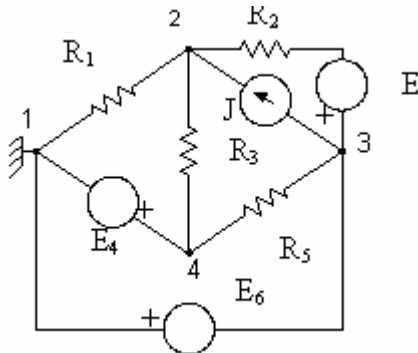


Fig. 15

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= E_4 \\ \varphi_3 &= -E_6 \\ \varphi_2(G_1 + G_2 + G_3) - \varphi_3G_2 - \varphi_4G_3 &= J - E_2G_2\end{aligned}$$

- *Fuentes de tensión ideales no concurrentes al mismo nudo.*

A diferencia del caso donde hay sólo una fuente de tensión ideal, ahora tenemos dos ramas en las cuales no podemos plantear la ecuación de nudos, dado que ambas tienen conductancia infinita. Para solucionar este problema, tomamos como referencia aquél nudo al cual concurre la mayor cantidad de fuentes ideales. A los efectos de poder plantear la ecuación correspondiente a las ramas en las cuales se encuentran las restantes fuentes ideales de tensión, dado que su resistencia es cero y les corresponde por lo tanto una conductancia infinita, introducimos como nueva variable la corriente que circula por las mismas.

Esta corriente se transforma en una incógnita más de nuestro sistema de ecuaciones, por lo que necesitaremos una ecuación auxiliar para poder resolverlo. Esta ecuación es provista por la relación volt-ampere de la rama en cuestión, dado que la diferencia entre los potenciales de los nudos extremos de la rama está fijada por la fuente ideal de tensión.

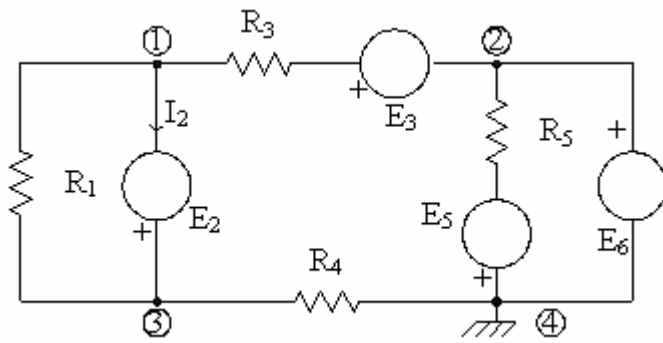


Fig. 16

$$\begin{cases} \varphi_4 = 0 \\ \varphi_2 = E_6 \\ \varphi_1(G_1 + G_3) - \varphi_2 G_3 - \varphi_3 G_1 = E_3 G_3 - I_2 \\ \varphi_3(G_1 + G_4) - \varphi_1 G_1 = I_2 \end{cases}$$

En este caso, la ecuación auxiliar será la que establece la d.d.p. entre los nudos 1 y 3:

$$\varphi_3 - \varphi_1 = E_2 \quad \rightarrow \quad \varphi_3 = \varphi_1 + E_2$$

haciendo los reemplazos correspondientes queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \varphi_1(G_1 + G_3) - (\varphi_1 + E_2)G_1 = E_3 G_3 - I_2 + E_6 G_3 \\ (\varphi_1 + E_2)(G_1 + G_4) - \varphi_1 G_1 - I_2 = 0 \end{cases}$$

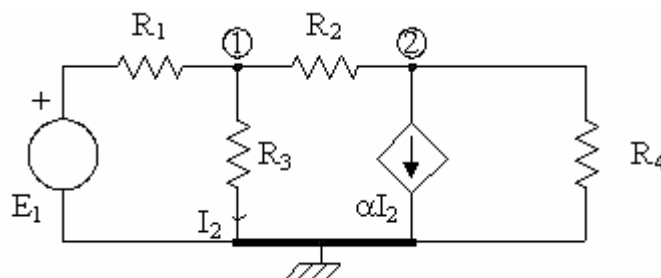
el cual, una vez ordenado, es:

$$\begin{cases} \varphi_1(G_1 + G_3 - G_1) + I_2 = E_2 G_1 + E_6 G_3 + E_3 G_3 \\ \varphi_1 G_4 - I_2 = E_2(G_1 + G_4) \end{cases}$$

Vemos así que el sistema se ha reducido a uno de 2 x 2, cuyas incógnitas son  $\varphi_1$  e  $I_2$ .

### 3.5.2 Resolución de circuitos con fuentes controladas por el método de nudos.

Utilizaremos para nuestro análisis el circuito de la figura 7, planteando directamente las ecuaciones del método de nudos:



$$\begin{cases} \varphi_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \varphi_2 \frac{1}{R_2} = \frac{E_1}{R_1} \\ -\varphi_1 \frac{1}{R_2} + \varphi_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) = -\alpha I_2 \end{cases}$$

Tal como en el método de bucles, vemos que la matriz de coeficientes es simétrica. Sin embargo,

aparece una variable no definida,  $I_2$ , que es la corriente de control de la fuente. Tratamos entonces de expresarla en función de las variables primarias del sistema, es decir, los potenciales de los nudos, con lo que llegamos a que:

$$I_2 = \frac{\varphi_1}{R_3}$$

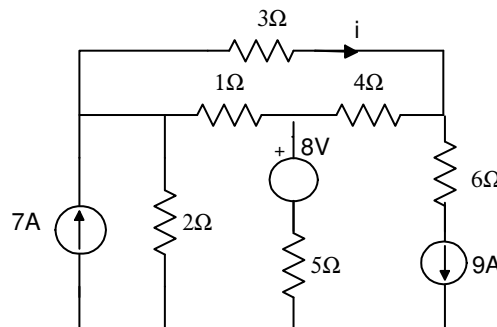
Si efectuamos los reemplazos correspondientes, vemos que el sistema de ecuaciones resultante posee una matriz de coeficientes no simétrica.

$$\begin{cases} \varphi_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \varphi_2 \frac{1}{R_2} = \frac{E_1}{R_1} \\ -\varphi_1 \left( \frac{1}{R_2} - \alpha \frac{1}{R_3} \right) + \varphi_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) = 0 \end{cases}$$

**Comentario:** tal como mencionamos previamente, la inclusión de un elemento no bilateral (una fuente controlada) en el circuito conduce a la falta de simetría en la matriz de coeficientes de cualquiera de los métodos de resolución.

### Ejercicios de aplicación

1) Determinar la corriente  $i$  para el circuito que se muestra usando el método de nudos

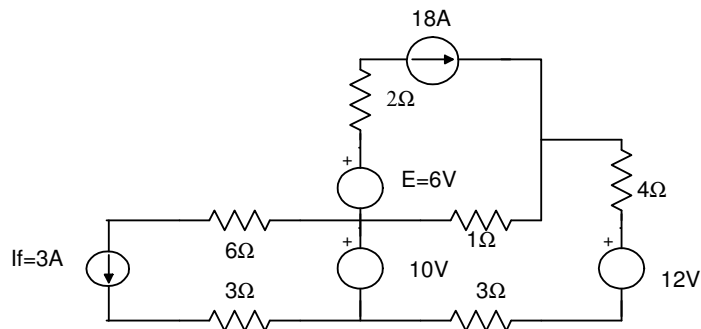


**Rta:**  $i = 5.381A$

3) Dado el siguiente circuito y sin modificarlo:

a) Plantear el sistema de ecuaciones de nudos

b) Determinar la potencia desarrollada por  $E$  e  $I_f$  indicando si se comportan como generadores o receptores. Justificar.



**Rta:**  $P_E = 109 W$  (generador)

$P_{I_f} = 31 W$  (generador)

### Comentario acerca de la simetría de la matriz pasiva de los sistemas de mallas, bucles y nudos:

Si observamos ya sea la matriz  $[R]$  como la  $[G]$ , vemos que existe una simetría respecto de la diagonal principal. En forma genérica lo expresamos como:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Esta simetría no es accidental ni inherente a una propiedad física de las redes lineales, sino que es el resultado de haber seguido un procedimiento deliberado en la obtención de las ecuaciones de equilibrio que no es obligatorio seguir. Recordemos primero que el proceso de obtención de ecuaciones de equilibrio involucra dos conjuntos de relaciones: a) las leyes de Kirchhoff, y b) las ecuaciones de definición de las variables elegidas. Si bien las relaciones V-A nos sirven para reemplazar (b) en (a), no las usaremos en este comentario. En efecto:

- En bucles, las variables son las corrientes de bucle, y las ecuaciones que se escriben son de la LKT. Si para escribir las ecuaciones de la segunda ley de Kirchhoff se utilizan los mismos caminos cerrados (bucles) que se usaron para definir las corrientes de bucle, entonces la matriz será simétrica.
- En nudos, las variables son los potenciales de los nudos, y las ecuaciones que se plantean son de la Ley de Kirchhoff de Corrientes. Si el conjunto de nudos adoptado como l.i. es el mismo que el utilizado para escribir las ecuaciones de la LKC, entonces la matriz  $[G]$  será simétrica.

En nuestro curso asociaremos la existencia de matrices simétricas con las redes lineales y bilaterales, es decir, sin fuentes controladas.

### 3.6 Síntesis de circuitos.

Diremos que realizamos la síntesis de un circuito cuando obtengamos un modelo del mismo a partir de un sistema de ecuaciones de mallas o de un sistema de ecuaciones de nudos. Analizaremos cada caso por separado.

#### 3.6.1 Circuitos sin fuentes controladas.

- *A partir de un sistema de ecuaciones de mallas.*

Primero verificamos si el sistema de ecuaciones cumple con las condiciones del método de mallas:

- Diagonal principal de la matriz pasiva positiva,
- Matriz de coeficientes del sistema simétrica, positivos sólo los elementos de la diagonal principal.
- Matriz pasiva o de coeficientes,  $[R]$  diagonalmente dominante.
- $\det [R] \neq 0$

**Ejemplo:**

$$\begin{cases} 6 I_1 - 4 I_2 - I_3 = 10 \\ -4 I_1 + 10 I_2 - 3 I_3 = 0 \\ I_1 - 3 I_2 + 5 I_3 = -2 \end{cases}$$



De la inspección de este sistema surgen las siguientes observaciones:

- la red tiene tres ventanas o mallas, dado que hay tres corrientes independientes,
- todos los coeficientes son no nulos, lo cual indica que todas las mallas tienen una rama en común entre si. Esto nos sirve para adoptar una disposición circuital,
- se cumplen las premisas mencionadas anteriormente (**i** a **iv**), lo cual nos confirma que el sistema efectivamente surgió de haber planteado el método de mallas en un circuito sin fuentes controladas.

Para realizar la síntesis, lo primero que hacemos es elegir un esquema de interconexión de acuerdo a los ceros de la matriz de coeficientes. Luego, leyendo la matriz de coeficientes, colocamos los elementos pasivos, ubicando primero los que se encuentran en ramas comunes a dos mallas y luego completando con los propios de la malla. Finalmente disponemos las fuentes según sea la forma más conveniente:

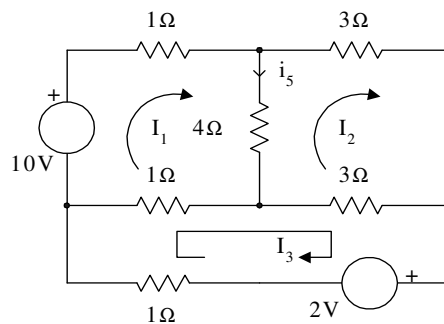


Fig. 17

El mismo criterio se puede aplicar a la síntesis de un sistema de ecuaciones de bucles, en cuyo caso la condición ii) pasa a decir solo "matriz de coeficientes simétrica respecto de la diagonal principal", y la iii) a decir "coeficientes de la diagonal principal mayores o iguales que cualquier otro coeficiente de la fila".

- *A partir de un sistema de ecuaciones de nudos.*

Las condiciones de partida son las mismas que en el caso anterior, en lo referente al sistema de ecuaciones. Supongamos tener:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = 30 \\ -\varphi_1 + 2\varphi_2 - \frac{1}{2}\varphi_3 = 20 \\ -2\varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_2 + 3\varphi_3 = -15 \end{array} \right.$$

Vemos que hay **tres ecuaciones**, de donde concluimos que el circuito tiene **cuatro nudos**, de los cuales uno es el de referencia. En el ejemplo la forma de la primera ecuación nos dice que hay **un nudo, el 1, cuyo potencial está forzado**. Además, el hecho de que todos los coeficientes son **no nulos** nos indica que **todos los nudos están vinculados entre sí** (no hay ceros en la matriz de coeficientes). Por otro lado, la **matriz de coeficientes es simétrica**, dado que  $\varphi_1$  es dato. A partir de

estas consideraciones, proponemos el siguiente modelo de circuito:

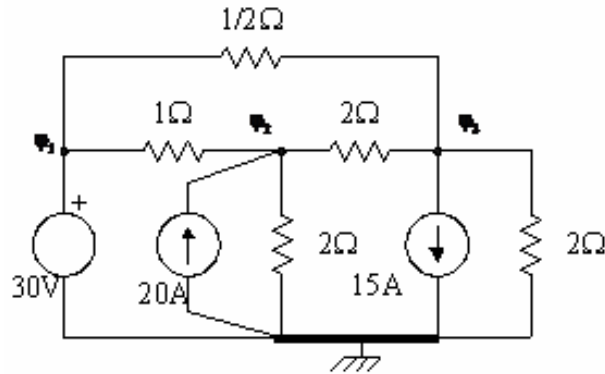


Fig. 18

### 3.6.2 Circuitos con fuentes controladas.

Es probable que nos encontremos frente a un sistema de ecuaciones, sea de nudos o de mallas, que no presente una simetría respecto de la diagonal principal, o en el cual el coeficiente de la diagonal principal no sea dominante frente a los restantes coeficientes de la fila. Esto no necesariamente transforma el sistema en algo imposible de ser sintetizado, pero en ese caso debemos considerar la posibilidad de la presencia de fuentes controladas en el circuito. Veremos sobre un ejemplo cómo se trabaja:

$$\begin{cases} 10\varphi_1 - 4\varphi_2 - 3\varphi_3 + 0\varphi_4 = 10 \\ -2\varphi_1 + 8\varphi_2 - 2\varphi_3 - 3\varphi_4 = 0 \\ -3\varphi_1 - 2\varphi_2 + 8\varphi_3 - 4\varphi_4 = 0 \\ 5\varphi_1 - 3\varphi_2 - 4\varphi_3 + 20\varphi_4 = 0 \end{cases}$$

Al ir verificando el cumplimiento de las cuatro condiciones, vemos que:

- i) se cumple,
- ii) no se cumple,
- iii) no se cumple,
- iv) se cumple.

Realizaremos las siguientes consideraciones:

a)  $a_{12} = a_{21}$  y  $a_{14} = a_{41}$

Entre llevar al elemento  $a_{12} = a_{21}$  o hacer  $a_{21} = a_{12}$ , conviene más la primera opción, pues la segunda nos conduciría a que  $a_{22} < \sum a_{2j}$ . Entonces, sumamos a ambos miembros de la ecuación  $2\varphi_2$ :

$$10\varphi_1 - 4\varphi_2 - 3\varphi_3 + 2\varphi_2 = 10 + 2\varphi_2$$

b) Debemos arreglar la ecuación 3 para que sea diagonalmente dominante. Para ello, y para no modificar las otras ecuaciones, hacemos:

$$-3 \varphi_1 - 2 \varphi_2 + 8 \varphi_3 - 4 \varphi_4 + \varphi_3 = \varphi_3$$

c) Llevamos  $a_{41} = 0$ , por lo que restamos a ambos miembros  $3\varphi_1$ :

$$5 \varphi_1 - 3 \varphi_2 - 4 \varphi_3 + 20 \varphi_4 - 5 \varphi_1 = 0 - 5 \varphi_1$$

Una vez realizados todos estos pasos, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 10 \varphi_1 - 2 \varphi_2 - 3 \varphi_3 - 0 \varphi_4 = 10 + 2 \varphi_2 \\ -2 \varphi_1 + 8 \varphi_2 - 2 \varphi_3 - 3 \varphi_4 = 0 \\ -3 \varphi_1 - 2 \varphi_2 + 9 \varphi_3 - 4 \varphi_4 = \varphi_3 \\ 0 \varphi_1 - 3 \varphi_2 - 4 \varphi_3 + 20 \varphi_4 = 0 - 5 \varphi_1 \end{cases}$$

cuyo esquema será:

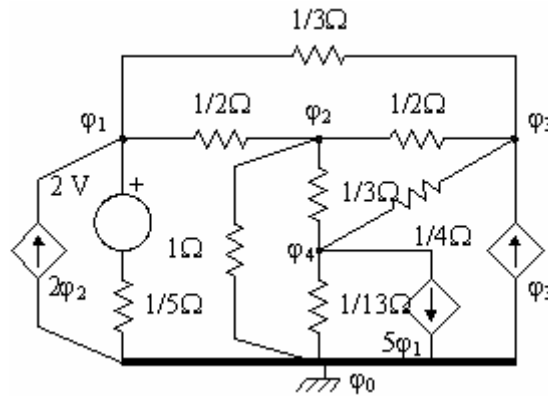


Fig. 19

### Ejercicios de aplicación

Dada la matriz de Mallas/ Nudos (haciendo  $x = i$  o  $\varphi$  respectivamente) encontrar las disposiciones circuitales correspondientes.

$$\begin{bmatrix} 10 & -15 & -2 \\ -15 & 20 & 5 \\ -3 & -8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## 3.7 Corrimiento de fuentes

### 3.7.1 Corrimiento de fuentes de tensión

Tal como se mencionó anteriormente, una fuente de tensión ideal no puede ser reemplazada por una fuente de corriente. Sin embargo, existe un procedimiento que, a menudo, permite obtener un esquema que sí es posible de ser transformado. Este es el procedimiento conocido como “corrimiento de fuentes”, y para ver como lo implementamos, consideremos la porción de red mostrada en la figura 20. Imaginemos “empujar” la fuente de tensión ideal a cada una de las ramas que concurren a uno de sus nudos extremos:

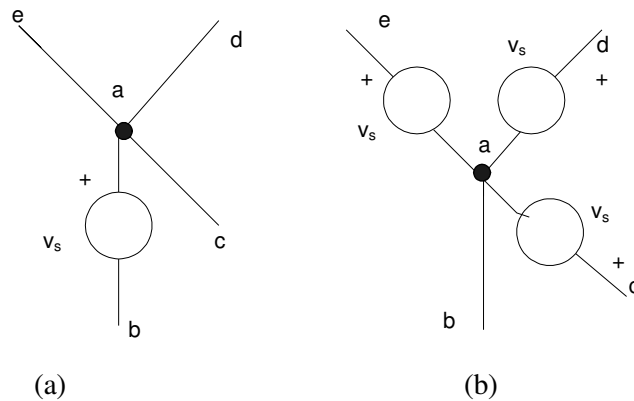


Fig. 20

La figura 20(b) muestra la red luego de que la fuente se "empujó" a través del nudo a hacia las ramas a-e, a-d y a-c. Vemos que las corrientes de malla en los caminos formados por los nudos d-a-e, d-a-c, c-a-b y e-a-b no se han modificado, dado que la LKT nos permite verificar que las d.d.p  $V_{ed}$ ,  $V_{dc}$  y  $V_{eb}$  y  $V_{cb}$  se han mantenido iguales al valor que tenían antes de efectuarse el corrimiento. Debido a que las corrientes por las ramas ab, ac, ad y ae de la red de partida son las mismas que las que circulan por esas ramas una vez efectuado el corrimiento, el circuito de la figura 20(b) es equivalente, desde el punto de vista de las corrientes, al circuito de la figura 22 (a). Pero si bien la f.e.m neta de las mallas de la figura 22(b) se mantiene inalterada, la d.d.p. entre los nudos a-e, a-b, a-c y a-d no es la misma que entre los mismos nudos del circuito de partida, dado que su valor se ve modificado por la presencia de la fuente.

En el caso de que alguna de las fuentes de tensión hubiera quedado en serie con una resistencia, ahora sí estamos en condiciones de efectuar una transformación de la misma en una fuente de corriente en paralelo con una resistencia, lo cual puede ser útil para simplificar aún más la red.

### 3.7.2 Corrimiento de fuentes de corriente

Una manipulación similar a la efectuada con las fuentes de tensión puede efectuarse con las fuentes de corrientes, tal como puede observarse en la figura 21.

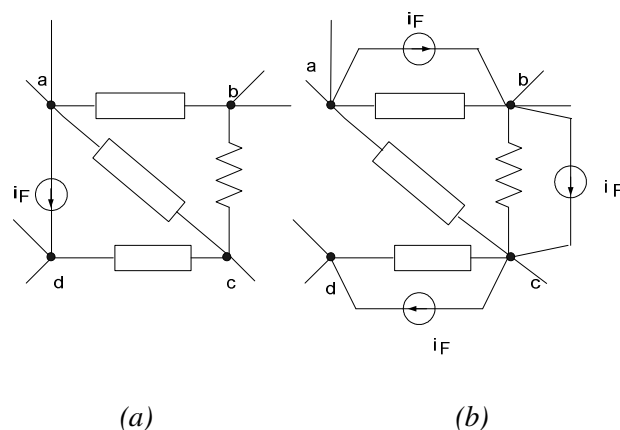


Fig. 21

En este caso, la fuente de corriente presente en la rama a-d del bucle a-b-c-d se conectó en paralelo con cada una de las ramas que conforman el mismo, tal como se muestra en la figura 23 b. La LKC puede ser usada para verificar en forma simple que los sentidos de las nuevas fuentes se han

colocado de manera de no alterar el balance de corrientes en los nudos a, b, c y d. Por lo tanto, la porción de red mostrada en la figura 21(b) es equivalente a la mostrada en la figura 21(a).

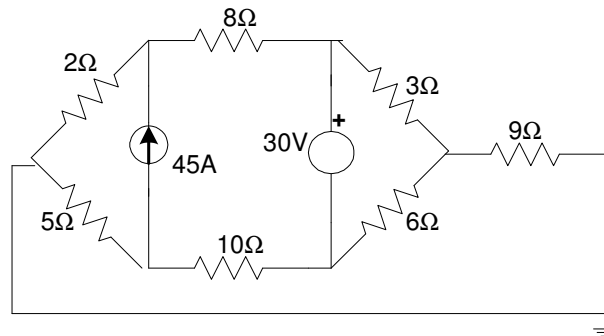
Sin embargo, tal como aclaramos en el caso de corrimiento de fuente de tensión, debemos tener en cuenta que en caso de tener que presentar los resultados en corrientes, deberá volverse al circuito de la fig. 21(a), donde están todas las ramas originales.

**Ejercicios de aplicación:**

1) Aplicando corrimiento de fuentes para reducir la red calcular:

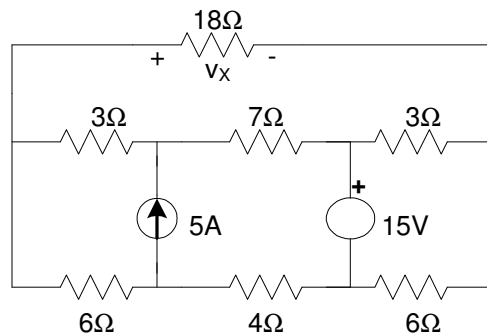
a) La corriente por la resistencia de  $9\Omega$ .

b) Los potenciales de todos los nudos de la red (original) por aplicación de las leyes de Kirchoff.



**Rta:**  $i = -2\text{ A}$

2) Mediante corrimiento de fuentes, reducir el circuito a una malla simple para poder calcular  $v_x$



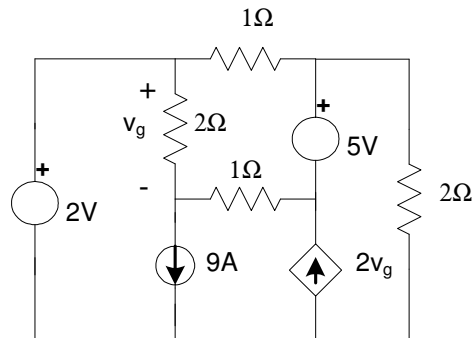
**Rta:**  $v_x = 18/3\text{ V}$

**PROBLEMAS DE APLICACIÓN**

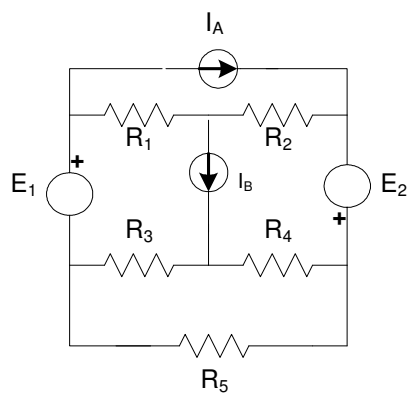
1) Para el circuito de la figura

a) Plantear el sistema de ecuaciones de nudos que permita resolverlo.

b) Plantear el sistema de ecuaciones de mallas y sacar conclusiones.

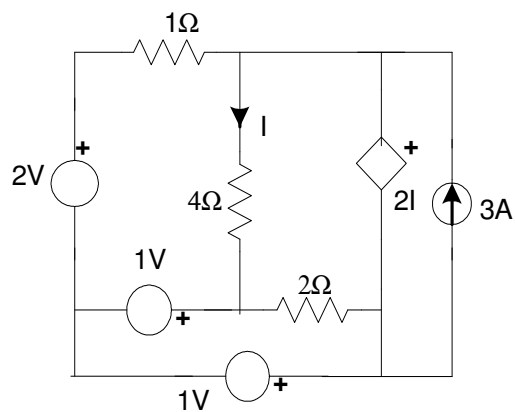


- 2) a) Determinar el número de ecuaciones necesarias para resolver el siguiente circuito por: Mallas, Bucles y Nudos. En función del número de variables forzadas elegir el más adecuado.

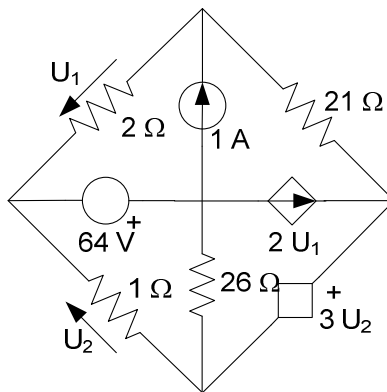


- b) Repetir el análisis si se permutara la ubicación de la fuente  $E_2$  con la fuente  $I_A$ .

- 3) Plantear las ecuaciones necesarias para obtener el estado de régimen del circuito por el método más conveniente. Justificar la elección del método.

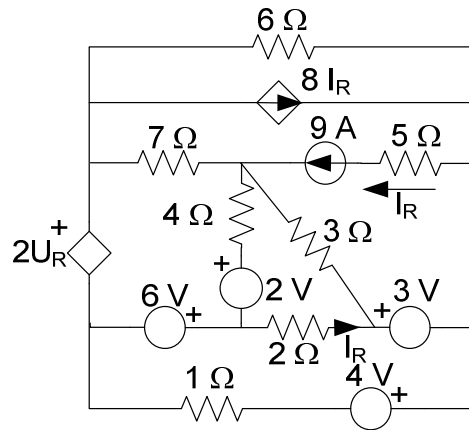


- 4) a) Plantear las ecuaciones de bucles y nudos  
b) Calcular el estado de régimen, aplicando el procedimiento más apropiado (a su criterio)

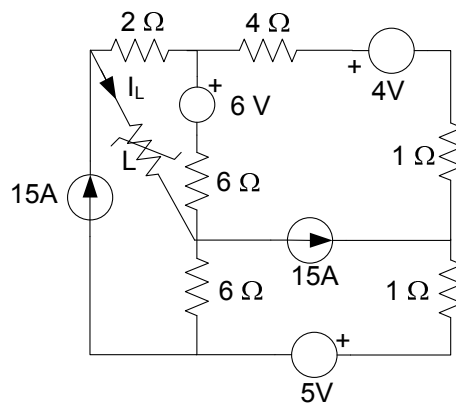


3) Dado el siguiente circuito:

- a) Plantear las ecuaciones de nudos
- b) Plantear las ecuaciones de bucle dibujando el árbol elegido.

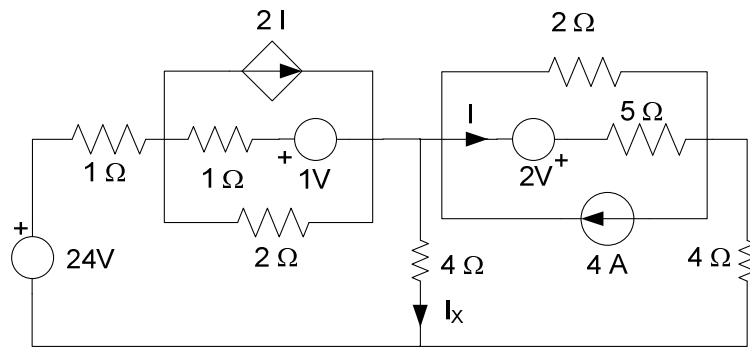


6) En el siguiente circuito, determinar el valor de la corriente  $I_L$  aplicando el método más conveniente.

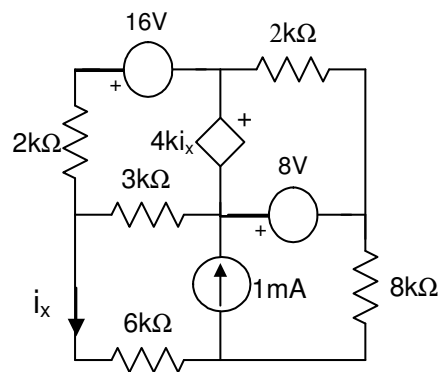


Podría aplicar algún método de resolución si esa rama tuviera un dipolo anómalo?

7) Calcular el valor de  $I_x$  aplicando el método más conveniente.



8) En el circuito de la figura determinar  $i_x$  y la potencia suministrada por la fuente de 8V mediante el método mas conveniente.



**Rta:**  $i_x = 2 \text{ mA}$

$P_{8V} = 72 \text{ W (generador)}$